Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre – Diciembre 2002

Nombre: ____________________

Carnet: ____________ Sección: ____

MA-2115—Segundo Parcial, Miércoles 20-11-2002—9:30

1. (8 pts.) Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' = 3\frac{(y')^2}{y} + y'y,$$

sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Solución:

$z = y^{'}$;

$y^{''} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\; y^{'} = \dfrac{dz}{dy} z \dfrac{dz}{dy} z = \dfrac{3z^2}{y} + zy$;

$\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{3z}{y} + y \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{3z}{y} \Rightarrow z = y^3 C$;

$z_H = y^3 C z = y^3 C(y) 3y^2 C + y^3 C^{'} = \dfrac{3}{y} y^3 C + y \Rightarrow C^{'} = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow C(y) = -\dfrac{1}{y}$

$z = Cy^3 + \left(-\dfrac{1}{y}\right) y^3 = Cy^3 - y^2$

$y^{'}(x) = Cy^3 - y^2$; $\qquad y^{'}(0) = -1$;

$-1 = C - 1 \Rightarrow C = 0 \; y^{'}(x) = -y^2 \Rightarrow \displaystyle\int_1^y -\frac{dy}{y^2} = \int_0^x dx \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = x$

$$\boxed{y = \frac{1}{x+1}}$$

2. (8 pts.) Sea $\phi(x)$ una solución de la ecuación diferencial

$$y' = 1 - y^{100},\; y(x_0) = y_0.$$

a) Mostrar que si $|y_0| < 1$, entonces $|\phi(x)| < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Si $|y_0| < 1$, ¿Puede existir un x_1 tal que $|\phi(x_1)| = 1$? Justifique.

c) Estudiar el crecimiento, decrecimiento y concavidad de las soluciones para los diferentes valores de y_0.

d) Graficar varias soluciones, incluyendo los casos $y_0 > 1$, $|y_0| < 1$, y $y_0 < -1$.

Solución:

Note que $y^{'}=1$ es solución con condición inicial $y(x_0)=1(a-b)$. Si existiera x_1 tal que $\phi(x_1)=1$ y $\phi(x)$ no constante (igual a 1) se tendrían dos soluciones diferentes cumpliendo la misma condición inicial $y(x_1)=1.$
Para esta contradice la unicidad de las soluciones que establece el Teorema de Picard. Y como muestra la ecuación diferencial satisface la hipótesis del Teorema de Picard. Esto no puede ocurrir. Por lo tanto la solución se mantiene en la franja $|y|<1$

3. (6 pts.) Hallar las ecuaciones de las trayectorias ortogonales a la familia de elipses

$$x^2+\frac{y^2}{4}=c,\ c\in\mathbb{R}$$

y graficar algunas curvas, tanto de la familia como de sus trayectorias ortogonales.

Solución:
$x^2+\dfrac{y^2}{4}=C\Rightarrow 2x+\dfrac{2yy^{'}}{4}=0\Rightarrow y^{'}=-\dfrac{4x}{y}$
Entonces las trayectorias ortogonales cumplen la ecuación
$y^{'}=\dfrac{y}{4x}\Rightarrow\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{4x}\qquad 4\ln|y|=\ln|kx|\qquad y^4=kx$

4. (8 pts.) Encontrar la solución general de la ecuación

$$y'=y-xe^{-2x}y^3.$$

Solución:
$y^{'}=y-xe^{-2x}y^3\Leftrightarrow y^{-3}y^{'}=y^{-2}=-xe^{-2x}\qquad u=y^{-2}\qquad u^{'}=-2y^{-3}y^{'}$
$\dfrac{u^{'}}{-2}-u=-xe^{-2x}\Leftrightarrow u^{'}+2u=2xe^{-2x}$
$u^{'}+2u=0\Rightarrow u_u=Ce^{-2x}$
Variación de constantes $u=C(x)e^{-2x}$
$u^{'}=C^{'}e^{-2x}+(-2)Ce^{-2x}$
$C^{'}e^{2x}+(-2)Ce^{-2x}\Rightarrow 2Ce^{-2x}=2xe^{-2x}\Rightarrow C^{'}=2x\Rightarrow c(x)=x^2$
$u(x)=e^{-2x}(C+x^2)$
$y^{-2}=e^{-2x}(x^2+C)\Rightarrow y^2=\dfrac{e^{2x}}{x^2+C}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{x^2+C}}$ Sabemos $y=0$ es solución.